676. D’Amore B. (2005). Noetica e semiotica nell’apprendimento della matematica. In: Ancona R.L., Faggiano E., Montone A., Pupillo R (eds.) (2005). *Insegnare la matematica nella scuola di tutti e di ciascuno*. Atti del convegno omonimo, Università di Bari, 16-18 febbraio 2004. Milano: Ghisetti & Corvi. ISBN: 88-538-0270-7.

Noetica e semiotica nell’apprendimento della matematica

Bruno D’Amore
Dipartimento di Matematica – Università di Bologna

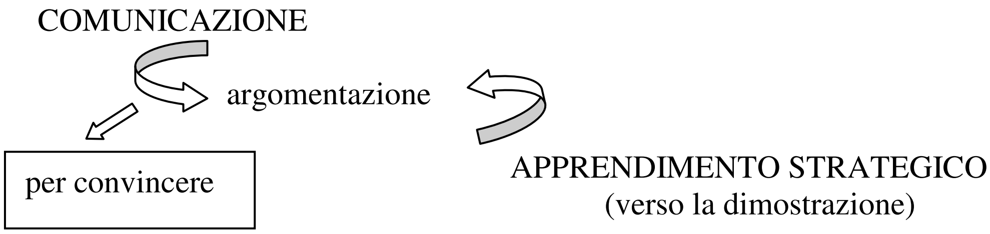
Summary. *Learning Mathematics is a multiform and complex process, by no means only a direct result of teaching. From the 1960s, Guy Brousseau laid the basis for a discipline that today is autonomous and well-founded, while still in construction. One of the most complex and urgent questions is that of relating two diverse and apparently unreconcilable aspects. Here the author attempts a synthesis betwen the founding and fundamental ideas of Brousseau and the results of the work on Noetics and Semiotics by Raymond Duval, showing how the latter can shed light on classroom behaviours originally studied by Brousseau.*

1. Apprendere la Matematica.

“*Apprendere la Matematica*” è un processo complesso che coinvolge un’infinità di fattori. Gli studi pionieristici di Brousseau, iniziati alla fine degli anni ’60, contribuirono a fare piazza pulita di ogni precedente semplificazione basata sulla esclusività del fattore “insegnamento”, ponendo invece l’accento sulla centralità del rapporto tra “insegnamento” ed “apprendimento” [il lavoro di Brousseau del 1986 è solo la punta di un iceberg, uno degli articoli più citati al mondo, che rappresenta però una sintesi, non un punto di partenza; in effetti Brousseau aveva iniziato a pubblicare i suoi risultati di ricerca già negli anni ’60 (Perrin-Glorian, 1994)]. Tali studi hanno, tra l’altro, mostrato al mondo che la Didattica della matematica è una disciplina a sé stante, con caratteristiche sue proprie che non possono essere ascritte all’interno della sola Matematica, ma neppure di Pedagogia, Psicologia ecc.
Furono a quel tempo determinanti le idee di “contratto”, di “ostacolo”, di “situazione” ecc. che, oggi, sono parte fondamentale del vocabolario specifico della nostra disciplina (D’Amore, 1999b). Pur arricchendosi di mille contributi, densi ed importanti, questi concetti di Brousseau restano decisivi per la comprensione piena del processo complesso detto sopra.
Tuttavia, a volte è necessario semplificare, sia per “penetrare” all’interno dei fenomeni ed impossessarsi di loro componenti specifiche, sia quando si voglia iniziare una formazione specifica, sia per dialogare senza doversi sempre sobbarcare il carico complesso di definizioni, citazioni e sottointesi.
Così, proprio per semplificare, si potrebbe dire che l’apprendimento matematico ha di specifico il fatto che esso si articola su varie direzioni, dato che coinvolge:

- l’apprendimento di concetti
- l’apprendimento e la gestione di algoritmi
- alcuni apprendimenti che qualcuno chiama nel loro complesso “strategici” e che si possono distinguere in due grandi filoni:
    - risoluzione di problemi
    - dimostrazione
- l’apprendimento della comunicazione specifica in Matematica.

Le varie componenti di questa suddivisione non sono ad intersezioni rigidamente vuote; per esempio, la “argomentazione” in Matematica rientra sia nella comunicazione sia nell’apprendimento strategico, come fase preliminare alla dimostrazione:



A me sembra che l’apprendimento concettuale (al quale si riserva spesso il nome di *noetica*) sia in un certo qual senso preliminare agli altri; è vero che vi sono apprendimenti elementari di Matematica da parte dei bambini (il sapersi orientare, il saper contare ecc.) che sembrano non richiedere concetti (sono spesso detti “ingenui” in contrapposizione a “formali”) (D’Amore, 1999c); essi sono tuttavia preliminari e assunti in forma implicita ed ingenua, appunto, più un’euristica all’interno dell’imitazione adulta che non una vera e propria costruzione consapevole. Mi sembra che gli apprendimenti consapevoli e costruttivi debbano avere sempre alla base un concetto sul quale si elaborano o si effettuano trasformazioni.
Questo spiega la mia insistenza di questi ultimi anni sulla noetica. Senza nulla togliere alla complessità del sistema “insegnamento-apprendimento”, mi sembra utile dedicare riflessioni sulla noetica ai diversi livelli di scolarità.

2. Concettualizzare gli “oggetti” della Matematica.

Ora, in Matematica, si parla spesso di “concetti” (qualche volta a sproposito). Senza voler fare il pedante filosofo, possiamo però dire almeno che i concetti matematici hanno, rispetto a quelli di altre discipline, alcune specificità:

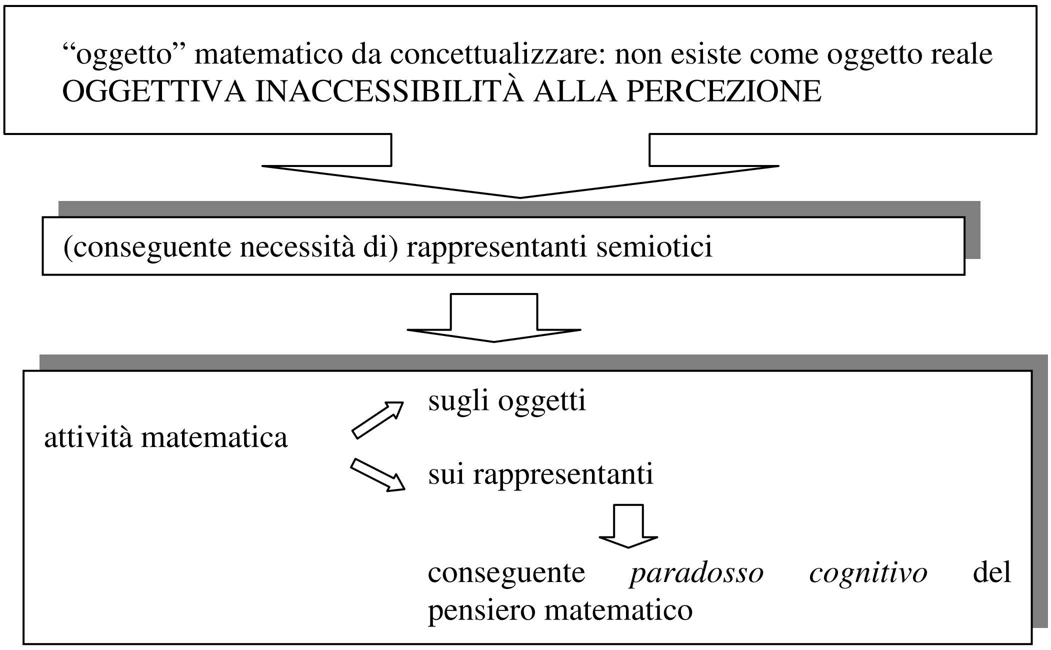
- ogni concetto matematico ha rinvii a “non-oggetti”, dal punto di vista di un realismo ingenuo; dunque la concettualizzazione non è e non può essere basata su significati che poggiano sulla realtà concreta dato che, in matematica, non sono possibili rinvii ostensivi;
- ogni concetto matematico è costretto a servirsi di rappresentazioni, dato che non vi sono “oggetti” da esibire in loro vece o a loro evocazione;[1] dunque la

[1] Qui “oggetto” è ingenuamente inteso nel senso di “oggetto reale” o di “cosa”. Quale sia il significato di questa parola (“oggetto reale - cosa”) è espresso in modo ancora oggi convincente nella *Metafisica* di Aristotele, quando afferma che la “cosa”, in quanto parte del reale, è ciò che presenta le tre caratteristiche seguenti:

- tridimensionalità
- accessibilità sensoriale multipla (cioè di più sensi contemporaneamente) indipendente dalle rappresentazioni semiotiche
- possibilità di separazione materiale e da altre parti della realtà, da altre “cose”.

concettualizzazione deve necessariamente passare attraverso registri rappresentativi che, per vari motivi, soprattutto se sono a carattere linguistico, non possono essere univoci: dunque, in matematica, non c'è accesso sensibile (vista, tatto, …) diretto agli "oggetti" ma solo a loro rappresentazioni semiotiche in diversi registri linguistici.

Nel sentiero tracciato da Duval, la nozione di concetto, preliminare o comunque prioritaria in quasi tutti gli Autori, diventa secondaria, mentre ciò che assume carattere di priorità è la coppia (*segno*, *oggetto*), il che porta al cosiddetto *paradosso cognitivo del pensiero matematico*, evidenziato proprio da Duval (1993)[2] e che io presenterò tra breve.
Riassumo parte di quanto già detto nel seguente schema:



Vediamo allora in che cosa consiste questo *paradosso cognitivo del pensiero matematico*, che ha forti ripercussioni cognitive (Duval, 1993, p. 38): «(…) d'une part, l'appréhension des objets mathématiques ne peut être qu'une appréhension conceptuelle et, d'autre part, c'est seulement par le moyen de représentations sémiotiques qu'une activité sur des objets mathématiques est possible. Ce paradoxe peut constituer un véritable cercle pour l'apprentissage. Comment des sujets en phase d'apprentisage pourraient-ils ne pas confondre les objets mathématiques avec leurs représentations sémiotiques s'ils ne peuvent avoir affaire qu'aux seules représentations sémiotiques? L'impossibilité d'un accès direct aux objets mathématiques, en dehors de toute représentation sémiotique, rend la confusion presqu'inévitable. Et, à l'inverse, comment peuvent-ils acquérir la maîtrise des traitements mathématiques nécessairement liés aux représentations sémiotiques s'ils n'ont pas déjà une appréhension conceptuelle des objets représentés? Ce paradoxe est d'autant plus fort que l'on identifie activité mathématique et activité conceptuelle et que l'on considère les représentations sémiotiques comme secondaires ou extrinsèques».
In questo paradosso, così ben evidenziato da Raymond Duval, si può nascondere una potenziale causa di mancate devoluzioni, come tento di provare in D'Amore (2003a). Il

[2] Ma i primi lavori di Duval su questo argomento sono del 1988.

problema principale, per dirla qui brevemente, sta nel fatto che, secondo l'insegnante, secondo la noosfera e secondo lo stesso studente, egli (studente) sta entrando in contatto con un "oggetto" matematico ma, di fatto, e nessuno talvolta sembra rendersene conto, lo studente sta entrando a contatto solo con una rappresentazione semiotica particolare di quell' "oggetto". Lo studente non ha, non può avere, accesso diretto all' "oggetto" e l'insegnante e la noosfera tendono talvolta a non separare oggetto e sua rappresentazione; lo studente è come bloccato, come inibito: non può far null'altro che confondere "oggetto" e sua rappresentazione semiotica perché non se ne rende conto, non lo sa. Il suo rapporto personale al sapere ha come "oggetto" qualche cosa di sfumato, di confuso. E quindi, di fronte ad un successivo bisogno concettuale, che si manifesta per esempio con la necessità di modificare la rappresentazione semiotica di quello stesso "oggetto", lo studente non ha mezzi critici né culturali né cognitivi; l'insegnante e la noosfera non capiscono il perché ed accusano lo studente, colpevolizzandolo di qualche cosa che egli non capisce, lo accusano di una incapacità vaga, non circostanziata e dettagliata: nessuno sa *esattamente* che cosa, davvero, lo studente non sa e non sa fare.

3. Semiotica e noetica.

In Matematica, dunque, l'acquisizione concettuale di un oggetto passa necessariamente attraverso l'acquisizione di una o più rappresentazioni semiotiche. Lo dice esplicitamente Duval, presentando la problematica dei registri, nei celebri articoli del 1988 pubblicati sugli *Annales* (1988a, 1988b, 1988c) [dei quali il lavoro del 1993 costituisce un primo tentativo di sintesi (1993)]; lo confermano Chevallard (1991), Godino e Batanero (1994).
Dunque, prendendo a prestito da Duval: non c'è noetica senza semiotica.
Tanto per chiarezza terminologica, ma senza alcuna pretesa di completezza, dato che non sempre questi termini sono usati nello stesso senso, preferisco esplicitare i significati dei quali mi servo; forzando non troppo la mano, tendo a volgere tutta l'argomentazione verso il campo didattico, più che verso quello filosofico cui sembra appartenere l'argomentazione a maggior ragione:

semiotica	$=_{df}$	acquisizione di una rappresentazione realizzata per mezzo di segni
noetica	$=_{df}$	acquisizione concettuale di un oggetto[3]

Indicherò, d'ora in poi:

r^m	$=_{df}$	registro semiotico (m = 1, 2, 3, …)
$R^m_i(A)$	$=_{df}$	rappresentazione semiotica i-esima (i = 1, 2, 3, …) di un concetto A nel registro semiotico r^m

Si può notare che, in base a queste scelte, se cambia il registro semiotico cambia necessariamente anche la rappresentazione semiotica, mentre non è detto il viceversa; cioè può cambiare la rappresentazione semiotica pur mantenendosi lo stesso registro semiotico.
Ancora una volta, uso un grafico per illustrare la questione, perché mi sembra più incisivo ed efficace:[4]

caratteristiche	*rappresentazione*	queste tre sono
della	*trattamento*	attività cognitive

[3] Per Platone, la noetica è l'atto di concepire attraverso il pensiero; per Aristotele, l'atto stesso di comprensione concettuale.
[4] Faccio ancora riferimento a Duval (1993).

semiotica *conversione* diverse

concetto A da rappresentare

⇓

scelta dei tratti distintivi di A

⇓

RAPPRESENTAZIONE di A $R^m_i(A)$ in un dato registro semiotico r^m

trasformazione di rappresentazione → *TRATTAMENTO*

⇓

nuova rappresentazione ($i \neq j$) $R^m_j(A)$ nello *stesso* registro semiotico r^m

trasformazione di registro → *CONVERSIONE*

⇓

nuova rappresentazione ($h \neq i$, $h \neq j$) $R^n_h(A)$ in un *altro* registro semiotico r^n ($n \neq m$)

($m, n, i, j, h = 1, 2, 3, \ldots$)

A questo punto è doverosa una precisazione sulla teoria che da anni sta sviluppando Raymond Duval. In essa, egli accorda alla conversione un posto centrale rispetto alle altre funzioni ed in particolare rispetto a quella di trattamento, considerata invece dai più come decisiva dal punto di vista matematico fino a qualche tempo fa.
La teoria dei registri deve essere valutata basandosi sugli apporti relativi alla ricchezza, alla novità delle osservazioni, così come alla novità delle attività di apprendimento che le variabili cognitive permettono di definire. E non in rapporto a delle decisioni a priori su che cos'è la matematica o in base a considerazioni globalizzanti non controllabili attraverso metodologie precise.
È ogni singolo allievo che apprende, e nessuno può apprendere (o comprendere) al posto di un altro! Inoltre, la riuscita di un'azione didattica non si giudica immediatamente, ma solo alcuni anni più tardi: ci sono molti casi di riuscita immediata che si rivelano poi essere degli insuccessi, a distanza di tempo… E viceversa.
Ecco, dunque, perché Duval insiste sul carattere centrale della conversione; è questo il punto decisivo, quel che veramente differenzia la sua teoria dei registri, rispetto a tutto quel che si può dire e si usa dire su segni e semiotica, o, più genericamente, sul cognitivo.

4. Noetica, semiotica ed una visione ingenua del costruttivismo.

La costruzione dei concetti matematici è dunque strettamente dipendente dalla capacità di usare *più* registri di rappresentazioni semiotiche di quei concetti:

- di *rappresentarli* in un dato registro
- di *trattare* tali rappresentazioni all'interno di uno stesso registro
- di *convertire* tali rappresentazioni da un dato registro ad un altro.

L'insieme di questi tre elementi e le considerazioni dei precedenti paragrafi, mette dunque in evidenza il profondo legame che c'è tra noetica e costruttivismo: che cosa vuol dire "costruzione della conoscenza in matematica" se non proprio l'unione di quelle tre "azioni" sui concetti, cioè l'espressione stessa della capacità di *rappresentare* i concetti, di *trattare* le rappresentazioni ottenute all'interno di un registro stabilito e di *convertire* le rappresentazioni da un registro ad un altro?
È come se si stessero specificando le operazioni-base che, nel loro insieme, definiscono quella "costruzione" che, altrimenti, resta un termine misterioso ed ambiguo, disponibile ad ogni sorta di interpretazione, anche metafisica.[5]
[Si noti ancora che, da un punto di vista cognitivo, insisto sul fato che si deve accordare più importanza al punto 3 (la conversione) piuttosto che al punto 2 (il trattamento) perché ciò permette di definire le variabili indipendenti sia per l'osservazione sia per l'insegnamento.
Ma da un punto di vista matematico si usa storicamente accordare più importanza al trattamento piuttosto che alla conversione. Ed è per questo che nella storia i matematici hanno sviluppato dei registri specifici che hanno permesso forme diverse di calcolo (aritmetico, algebrico, analitico, logico, ...)].

5. Risvolti didattici: mancata accettazione della devoluzione, scolarizzazione dei saperi.

La rinuncia dello studente alla *devoluzione* (rinuncia ovviamente inconsapevole), l'incapacità dello studente di implicarsi (come risultato di esiti negativi nei casi di tentativi), assumendosi carico diretto e personale della responsabilità della costruzione della conoscenza, in ambiente scuola, sono legate alla incapacità (talvolta solo supposta) o di rappresentare, o di trattare o di convertire, a causa di una mancanza didattica specifica a monte. L'insegnante potrebbe infatti non preoccuparsi dei singoli componenti della costruzione a causa di una supposta identità tra semiotica e noetica (Duval, 1993) (identità che è molto diffusa nel pensiero degli insegnanti, specie di quelli che non hanno mai avuto occasione di riflettere su questa questione, o che la considerano superflua).[6] Ciò potrebbe portare alla scelta rinunciataria da parte dello studente e quindi alla scolarizzazione dei saperi (D'Amore, 1999a):
«Con il termine "scolarizzazione del sapere" intendo qui riferirmi a quell'atto in larga misura inconsapevole, attraverso il quale l'allievo, ad un certo punto della sua vita sociale e scolastica (ma quasi sempre nel corso della Scuola Elementare), delega alla Scuola (come istituzione) ed all'insegnante di scuola (come rappresentante dell'istituzione) il compito di *selezionare per lui i saperi significativi* (quelli che lo sono socialmente, per status riconosciuto e legittimato della noosfera), rinunciando a farsi carico diretto della loro scelta

---

[5] Naturalmente questa osservazione, tutto il paragrafo, ma anche tutto questo testo, sono specifici per la matematica; non so valutare quanto siano estendibili ad una teoria dei concetti o, addirittura, ad una gnoseologia.
[6] Il che rimanda ad un discorso assai più generale, quello sulle credenze implicite dell'insegnante, affrontato in modo profondo, sistematico e ricorrente, in (Speranza, 1997).

in base a qualsiasi forma di criterio personale (gusto, interesse, motivazione,…). Poiché questa scolarizzazione comporta il riconoscimento dell'insegnante come depositario dei saperi che socialmente contano, è anche ovvio che vi è, più o meno contemporaneamente, una scolarizzazione dei rapporti interpersonali (tra studente ed insegnante e tra studente e compagni) e del rapporto tra lo studente ed il sapere: è quel che (…) si chiama "scolarizzazione delle relazioni"».

6. Conclusioni.

1. Solo un'attenta riflessione su questi aspetti, apparentemente così astratti ed astrusi, lontani dalla pratica didattica, ci fornisce strumenti concreti per riconoscere diffusi fatti d'aula. Rinuncia alla devoluzione e scolarizzazione, sono fenomeni negativi sempre in agguato a qualsiasi livello scolastico. Ora sappiamo che causa di essi possono essere malfunzionamenti cognitivi originati dall'aver confuso semiotica e noetica, dall'aver cioè creduto di aver costruito sapere solo perché ci si è impadroniti di sue rappresentazioni parziali.
2. Considero fondamentali per lo studio della Didattica della matematica le opere di due pionieri francesi, Guy Brousseau e Raymond Duval; i loro contributi (del primo, a partire dagli anni '60; del secondo a partire dagli anni '80) sono stati fondamentali, pur nella loro ovvia ed evidente profonda diversità. Con questo lavoro [e soprattutto con il più approfondito D'Amore (2003b)] suggerisco un legame profondo tra i due studi; partendo dalle ipotesi fondamentali di Brousseau e mettendo in campo le intuizioni e le ricerche di Duval, è possibile ritornare all'aula vera e propria, quella vera, quotidiana, quella che interessa noi ricercatori e qualsiasi insegnante, e rispondere a domande che, altrimenti, sono destinate o a restare senza risposta o ad avere risposte banali. Mi piace sottolineare con ciò l'attualità imperitura degli studi anticipatori di Brousseau, al quale tutti noi siamo debitori, che, ben lungi dall'essere superati o datati, rivelano invece tutta la loro vitalità e la loro incredibile forza analitica. Tutta ancora da scoprire.

Bibliografia

Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 7, 2, 33-115.

Chevallard Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'acitivité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble*. LSD2, IMAG. Grenoble: Université J. Fourier.

D'Amore B. (1999a). Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate*. 22A, 3, 247-276.

D'Amore B. (1999b). *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (1999c). *La Matematica in continuità tra la Scuola dell'Infanzia e la Scuola Elementare*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (2003a). La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics*. 23, 1, 47-51.

D'Amore B. (2003b). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora.

Duval R. (1988a). Ecarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 1, 7-25.

Duval R. (1988b). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 1, 57-74.

Duval R. (1988c). Graphiques et équations. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 1, 235-253.

Duval R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, ULP, IREM Strasbourg. 5, 37-65.

Godino J.D., Batanero C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 3, 325-355.

Perrin Glorian M.-J. (1994). Théorie des situations didactiques: naissance, développement, perspectives. In: Artigue M., Gras R., Laborde C., Tavignot P. (eds.) (1994). *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*. Grenoble: La Pensée Sauvage. 97-148.

Speranza F. (1997). *Scritti di Epistemologia della Matematica*. Bologna: Pitagora.